

OLIMPIADA LOCALA DE MATEMATICĂ

13 FEBRUARIE 2010 CLASA A VIII-A

1.a) Demonstrați că dacă  $x, y \in (0, \infty)$  atunci  $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{x \cdot y}$ ;

b) Demonstrați că dacă  $x, y, z \in (0, \infty)$ , atunci

$$(x + 2 \cdot y) \cdot (y + z) \cdot (z + 2 \cdot x) > 16xyz$$

c) Demonstrați că dacă  $a, b, c, m, n, p \in (0, \infty)$  astfel încât

$$a+b+c \geq am+bn+cp \text{ atunci: } a+b+c \leq \frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{c}{p}$$

2. Demonstrați că numărul

$$m = \sqrt{6 - \sqrt{35}}(\sqrt{14} - \sqrt{10})(6 + \sqrt{35}) \text{ este număr natural.}$$

3.  $n \geq 2$  este un număr natural și  $D_n = \{d_1, \dots, d_k\}$  este mulțimea divizorilor naturali ai lui  $n$ . Demonstrați că

$$\frac{d_1 + \dots + d_k}{\frac{1}{d_1} + \dots + \frac{1}{d_k}} \text{ este număr natural}$$

4. În triunghiul  $ABC$   $a=BC$ ,  $b=AC$ ,  $c=AB$ ,  $a \neq b$ ,  $b \neq c$ ,  $a \neq c$ . În vârfurile triunghiului  $ABC$ , de aceeași parte a planului său ridicăm perpendicularele  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  de lungimi respectiv  $a\sqrt{3}/3$ ,  $b\sqrt{3}/3$ ,  $c\sqrt{3}/3$ . Notăm  $G$  centrul de greutate al triunghiului  $ABC$ , iar cu  $G_1$ ,  $O_1$  centrul de greutate și centrul cercului circumscris triunghiului  $A_1B_1C_1$ .

Arătați că:

a)  $GA_1 = GB_1 = GC_1$

b)  $GO_1$  este perpendiculară pe planul  $(A_1B_1C_1)$ .

c) dacă  $d = (ABC) \cap (A_1B_1C_1)$  atunci  $d$  este perpendiculară pe  $G_1O_1$ .

NOTA

Toate subiectele sunt obligatorii; fiecare subiect are 7 puncte; timp de lucru 3 ore.